

**PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA APLICADA AO  
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA DE SISTEMAS  
HIDROTÉRMICOS COM REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO ESTOCÁSTICO  
DE AFLUÊNCIAS POR MODELOS AUTO-REGRESSIVOS PERIÓDICOS**



# RELATÓRIO

Nº Técnico 237/93

Revisão \_\_\_\_\_

CLIENTE:

ELETROBRÁS - Centrais Elétricas Brasileiras S/A  
Av. Marechal Floriano, 19/20º andar  
20.000 - Rio de Janeiro - RJ  
At.: Engº Luiz Alberto Machado Fortunato

REFERÊNCIA:

PROJETO:

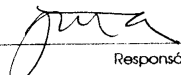
DPP/PON-2000/1088

TÍTULO:

Programação Dinâmica Dual Estocástica Aplicada ao Planejamento da Operação Energética de Sistemas Hidrotérmicos com Representação do Processo Estocástico de Afluências por Modelos Auto-regressivos Periódicos.


RESUMO:

Este relatório descreve como incorporar a representação do modelo estocástico de afluências por modelos auto-regressivos periódicos no algoritmo de programação dinâmica dual estocástica.

  
Responsável pelo Relatório

Nome: Joari Paulo da Costa  
Telefone: (021) 598-2450  
Fax: (021) 260-1340

AUTORES:

Maria Elvira Pifeiro Maceira 

COORDENAÇÃO

  
Coordenador

Nome: Sergio Henrique F. Cunha

APROVAÇÃO:

  
Diretor  
Nome: Marcio Szechtman

CLASSIFICAÇÃO:

PALAVRAS-CHAVE:

programação dinâmica dual, modelo estocástico, modelos auto-regressivos.

Para informações adicionais entre em contato com o responsável técnico, usando os números de telefone ou fax indicados a seguir do respectivo nome

O presente relatório consta de 35 folhas e anexos

**AGRADECIMENTOS**

A elaboração deste relatório contou com as valiosas sugestões do Dr. Mário Veiga Ferraz Pereira.

**ÍNDICE**

<b>1 - INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 - O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA</b>	<b>3</b>
<b>3 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA</b>	<b>7</b>
PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL DETERMINÍSTICA	7
PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA	15
VETORES ALEATÓRIOS INDEPENDENTES	18
VETORES ALEATÓRIOS LINEARMENTE DEPENDENTES	22
<b>4 - CONCLUSÕES</b>	<b>30</b>
<b>5 - REFERÊNCIAS</b>	<b>31</b>
<b>APÊNDICE - O MODELO AUTO-REGRESSIVO PERIÓDICO</b>	<b>33</b>

## 1 - INTRODUÇÃO

O planejamento da operação energética ótima de um sistema de geração hidrotérmico tem como objetivo determinar, a cada período, uma meta de operação para cada unidade geradora do sistema que minimize o custo esperado de operação ao longo do período de planejamento. O custo de operação é composto de custo de combustível das unidades termoeletricas e penalidades por eventuais não atendimentos da demanda de energia.

O problema de operação hidrotérmica apresenta as seguintes características:

- A existência de estoques limitados de energia hidroelétrica, sob a forma de água armazenada nos reservatórios do sistema, torna o problema de operação hidrotérmica bastante *complexo e não-separável no tempo*, pois introduz uma ligação entre a decisão operativa em um período qualquer e as consequências futuras desta decisão. Por exemplo, se após deplecionarmos grandes volumes de energia hidroelétrica, ocorrerem baixas afluências, as unidades geradoras de hidroeletricidade não serão capazes de atender a demanda, sendo necessário a utilização intensiva da geração térmica, ainda com risco de não atendimento da demanda de energia. Por sua vez, se mantivermos o nível dos reservatórios elevados através do uso mais intenso da geração térmica e ocorrerem afluências elevadas no futuro, as capacidades dos reservatórios serão excedidas com vertimento de energia no sistema, implicando em desperdício de energia.
- Como as afluências futuras ao sistema de reservatórios são desconhecidas no instante da tomada de decisão operativa, o problema de operação hidrotérmica é *estocástico*.
- A existência de múltiplos reservatórios em cascata e a necessidade de uma otimização multi-período caracteriza o problema como de *grande porte*.
- A função objetivo é *não-linear*, resultante de custos de operação térmica e relações cota-volume e cota-área não lineares.

O problema de operação hidrotérmica pode ser resolvido por programação dinâmica estocástica (PDE) [1], [2]. Neste algoritmo as variáveis que podem influir no resultado da operação hidrotérmica compõem o estado do sistema e são representadas por valores discretos, sendo necessário realizar diversas simplificações na representação do sistema para que o algoritmo PDE seja viável computacionalmente, mesmo para sistemas de usinas hidroelétricas bastante reduzidos.

Inicialmente, este relatório descreve uma metodologia baseada na programação dinâmica estocástica, denominada programação dinâmica dual estocástica (PDDE) [3], [4], [5], onde não é necessário discretizar o espaço de estados do sistema. Neste algoritmo, mostra-se que o custo de operação em um estágio ( $t$ ) qualquer até o final do horizonte de planejamento ( $T$ ) é uma função linear por partes e, então, uma aproximação desta função é construída de forma recursiva. Em seguida, descreve-se como representar, no algoritmo PDDE, o processo estocástico de afluições por modelos sofisticados, como por exemplo, por modelos auto-regressivos periódicos.

## 2 - O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO HIDROTÉRMICA

O problema de operação ótima de um sistema hidrotérmico consiste em determinar uma *estratégia* de operação que a cada *estágio* do período de planejamento, conhecido o *estado* do sistema no início do estágio, forneça as *metas* de geração de cada unidade geradora. Esta estratégia deve minimizar o valor esperado do custo de operação ao longo do período, composto de custos de combustível mais penalizações por eventuais falhas no atendimento de energia. O estado do sistema é composto por variáveis que podem influir no resultado da operação.

O problema de operação hidrotérmica pode ser resolvido por programação dinâmica estocástica (PDE), representada pela seguinte equação recursiva ( $t = T, T-1, \dots, 1$  e  $\forall X_t$ ):

$$\alpha_t(X_t) = E_{A_t|X_t} \left( \text{Min}_{U_t} C_t(U_t) + \frac{1}{\beta} \alpha_{t+1}(X_{t+1}) \right)$$

s.a. (1)

$$V_{t+1}(i) = V_t(i) + A_t(i) - (Q_t(i) + S_t(i)) + \sum_{j \in M_i} (Q_t(j) + S_t(j))$$

$$\underline{V}_{t+1}(i) \leq V_{t+1}(i) \leq \bar{V}_{t+1}(i)$$

$$Q_t(i) \leq \bar{Q}_t(i)$$

$$Q_t(i) + S_t(i) \geq L_t(i)$$

$i = 1, \dots, n^\circ$  total de usinas hidroelétricas do sistema em estudo (NUH)

onde:

$V_t$  é o vetor de níveis de armazenamento nos reservatórios no início do estágio  $t$ .

$A_t$  é o vetor de afluências incrementais durante o estágio  $t$ .

$X_t$  é o vetor de estados do sistema no início do estágio  $t$ . No caso de sistemas hidroelétricos, pelo menos duas variáveis de estado devem ser representadas:  $V_t$  e alguma informação sobre a tendência hidrológica, por exemplo,  $A_{t-1}$ . Esta representação da tendência hidrológica equivale a dizer que as afluências ao sistema seguem, a cada período, um processo auto-regressivo de ordem um (AR(1)).

$Q_t$  é o vetor de vazões turbinadas nos reservatórios durante o estágio  $t$ .

$S_t$  é o vetor de vazões defluídas dos vertedores durante o estágio  $t$ .

$U_t$  é o vetor de decisões para o estágio  $t$ . Geralmente representa  $Q_t$  e  $S_t$ .

$C_t(U_t)$  é o custo imediato associado à decisão  $U_t$ .

$\alpha_t(X_t)$  é o valor esperado do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento sob a hipótese de operação ótima.

$A_t | X_t$  representa a distribuição de probabilidades da afluência  $A_t$  condicionada ao estado do sistema  $X_t$ .

$L_t$  representa limites inferiores na vazão defluente.

$\underline{V}_t, \bar{V}_t$  representa limites nas capacidades mínima e máxima de armazenamento.

$\bar{Q}_t$  representa limites máximos no turbinamento.

$\beta$  é a taxa de desconto.

$M_i$  é o conjunto de usinas hidroelétricas imediatamente a montante da usina hidroelétrica  $i$ .

$T$  horizonte de planejamento

Na equação (1),  $C_t(U_t)$  representa o custo imediato associado a decisão  $U_t$  e  $\alpha_{t+1}(X_{t+1})$  representa o valor esperado do custo futuro da decisão  $U_t$ , isto é, o valor esperado das consequências desta decisão no futuro.

O custo imediato de operação associado à decisão  $U_t$ ,  $C_t(U_t)$ , advém do custo de geração térmica necessária para atender o mercado de energia no estágio  $t$ . A quantidade de geração térmica a ser utilizada depende da produção de energia hidroelétrica,  $GH(U_t)$ :

$$GH(U_t) = \sum_{i=1}^{NUH} \rho_i Q_t(i) \quad (2)$$

onde  $\rho_i$  é produtibilidade da  $i$ -ésima usina hidroelétrica.

O restante do mercado de energia é atendido pelas unidades térmicas, onde o corte de carga ou déficit é representado por uma unidade térmica fictícia de maior custo unitário. A ordem de entrada em operação das unidades térmicas é dada pela ordem de custo unitário. Isto significa que uma unidade térmica mais barata é utilizada até a sua capacidade máxima antes de outra unidade térmica de custo mais elevado entrar em operação. O custo imediato de operação é função da geração das unidades térmicas que é, em geral, representada por uma função linear por partes:

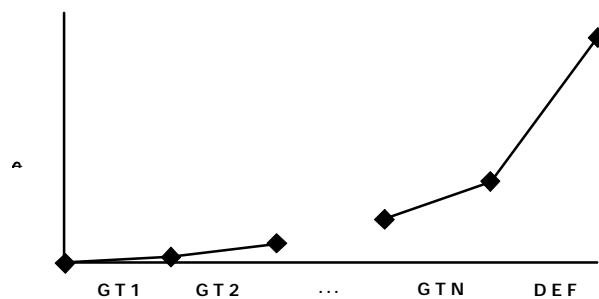


Figura 1 - Representação do Custo de Geração Térmica

Logo, o custo imediato de operação a cada estágio, pode ser obtido resolvendo-se:



$$C_t(U_t) = C_t(Q_t, S_t) = \text{Min} \sum_{j=1}^{\text{NUT}} CT_j(GT_{t,j})$$

s.a. (3)

$$\sum_{i \in \text{NUH}_k} \rho_i Q_{t,i} + \sum_{j \in \text{NUT}_k} GT_{t,j} + \sum_{i \in \Omega_k} (F_{t,i,k} - F_{t,k,i}) = D_{t,k} \quad k = 1, \dots, \text{NS}$$

$$GT_{t,j} \leq \overline{GT}_j \quad \forall j \in \text{NUT}_k, k = 1, \dots, \text{NS}$$

$$|F_{t,i,k}| \leq \overline{F}_{t,i,k} \quad i = 1, \dots, \text{NS}, k = 1, \dots, \text{NS}$$

onde

NS número de subsistemas.

$\text{NUH}_k$  conjunto de usinas hidroelétricas do k-ésimo subsistema.

$\text{NUT}_k$  conjunto de usinas térmicas do k-ésimo subsistema.

NUT número total de usinas térmicas.

$GT_{t,j}$  geração da j-ésima usina térmica no estágio t.

$\overline{GT}_j$  limite de capacidade máxima da j-ésima usina térmica.

$CT_j$  custo de geração da j-ésima usina térmica.

$D_{t,k}$  demanda de energia do k-ésimo subsistema no estágio t.

$F_{t,i,k}$  intercâmbio de energia do subsistema i para o subsistema k no estágio t.

$\overline{F}_{t,i,k}$  limite de intercâmbio entre os subsistemas i e k.

$\Omega_k$  conjunto de subsistemas diretamente conectados ao subsistema k.

O algoritmo de PDE constrói a função custo futuro,  $\alpha_t(X_t)$ , discretizando o espaço de estados  $X_t$  em um conjunto de valores e resolvendo a equação (1) para cada um desses valores. Valores intermediários de  $\alpha_t(X_t)$  são obtidos por interpolação dos valores discretizados vizinhos. O algoritmo de PDE é, então, descrito pelos seguintes passos:

- a. Inicialize  $\alpha_{T+1}$
- b. Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$ 
  - Repita para  $x_t^i, i = 1, \dots, n^\circ$  de discretizações
    - Repita para cada cenário de aflúncias  $A_t$
    - Faz o balanço de energia
    - Calcula o custo de operação
    - Calcula o valor esperado do custo de operação
  - Constrói função de custo futuro (caracterizada pelo conjunto  $\alpha_t(x_t^j), j = 1, \dots, n^\circ$  de discretizações)
- c. Teste de convergência
- d. Se não convergiu vá para (b)

Este algoritmo possui muitas características interessantes: é aplicável a problemas multi-estágios, problemas estocásticos, é possível representar não linearidades, etc. Porém apresenta como desvantagem a discretização do espaço de estados  $X_t$ .

Supondo que cada um dos NUH níveis de armazenamento,  $V_t$ , e afluições no estágio anterior,  $A_{t-1}$ , sejam discretizados em  $N$  intervalos, tem-se  $N^{2\text{NUH}}$  estados discretizados. É fácil ver que o número de estados discretizados e, conseqüentemente o esforço computacional, cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado. Isto significa que a resolução da equação (1) pelo algoritmo de PDE torna-se inviável mesmo para sistemas de usinas hidroelétricas bastante reduzidos. Por exemplo, supondo  $N = 20$  intervalos de discretização:

- 1 usina hidroelétrica  $20^2 = 400$  estados
- 2 usinas hidroelétricas  $20^4 = 160000$  estados
- 3 usinas hidroelétricas  $20^6 = 64$  milhões de estados
- 5 usinas hidroelétricas  $20^8 = 25$  bilhões de estados
- 5 usinas hidroelétricas  $20^{10} = 10$  trilhões de estados

No próximo capítulo é descrito uma metodologia baseada na programação dinâmica estocástica, denominada *programação dinâmica dual estocástica (PDDE)* [3], [4], [5], que mostra que a função custo futuro é uma função linear por partes e então, a cada iteração, usa uma relaxação dessa função como aproximação, sem discretizar o espaço de estados. Neste algoritmo, é possível representar o processo estocástico de afluições por modelos mais sofisticados, por exemplo, por modelos auto-regressivos periódicos de ordens maiores que um. No algoritmo de programação dinâmica estocástica tradicional não é computacionalmente viável devido ao aumento que acarretaria no número de variáveis de estado.

### 3 - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

#### Programação Dinâmica Dual Determinística

Seja o problema de operação hidrotérmica (1) em que a afluência a cada usina hidroelétrica, em qualquer estágio do período de planejamento, é conhecida. Este problema em apenas dois estágios pode ser representado por:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (4)$$

$$\text{s.a. } \begin{aligned} A_1 x_1 &\geq b_1 \\ E_1 x_1 + A_2 x_2 &\geq b_2 \end{aligned}$$

E pode ser interpretado como um processo de decisão em dois estágios.

1º estágio escolhe-se-se uma decisão  $x_1$  viável,  $x_1^*$ , tal que  $A x_1^* \geq b_1$ .

2º estágio dada a decisão  $x_1^*$ , resolve-se o problema de otimização do 2º estágio:

$$\text{Min } c_2 x_2 \quad (5)$$

$$\text{s.a. } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^*$$

onde  $x_1^*$ , por ser conhecido, passa para o lado direito do conjunto de restrições do problema.

Os vetores  $x_1$  e  $x_2$  representam os volumes finais das usinas hidroelétricas, as vazões turbinadas, as gerações térmicas, etc., no primeiro e segundo estágio respectivamente. E o objetivo do processo é minimizar  $c_1 x_1 + c_2 x_2$ .

Observa-se que  $c_2 x_2^*$ , onde  $x_2^*$  é a solução ótima do problema de 2º estágio, é uma função da decisão  $x_1^*$ , do problema de 1º estágio. Logo, podemos escrever:

$$\alpha_1(x_1) = \text{Min } c_2 x_2 \quad (6)$$

$$\text{s.a. } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1$$

E sendo  $\alpha_1(x_1)$  a solução ótima do problema (6), reescreve-se o problema original (4) como:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \\ \text{s.a. } & A_1 x_1 \geq b_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Dessa forma, pode-se entender  $\alpha_1(x_1)$  como uma função que fornece informações sobre as consequências da decisão  $x_1$  no futuro.

O princípio de decomposição de Benders [6] é uma técnica que permite construir, de forma iterativa, aproximações para a função  $\alpha_1(x_1)$ , baseada na solução do problema de 2º estágio. De forma simplificada, os problemas de 1º estágio e 2º estágio são resolvidos, como se segue:

1. Adote uma aproximação para  $\hat{\alpha}_1(x_1)$
2. Resolva o problema de 1º estágio, obtendo-se  $x_1^*$
3. Dado  $x_1^*$ , resolva o problema de 2º estágio, cuja solução é dada por  $x_2^*$
4. Associados a solução do problema de 2º estágio, existem os multiplicadores de Lagrange, que medem variações na função objetivo devido a variações marginais em  $x_1$ . Esses multiplicadores são usados para construir uma aproximação mais precisa  $\hat{\alpha}_1(x_1)$
5. Retorne ao passo (2)

O comportamento da função custo futuro,  $\alpha_1(x_1)$ , pode ser caracterizado a partir do dual do problema de 2º estágio, sob a hipótese de linearidade deste problema. Seja o dual do problema (6):

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) = \text{Max } & \pi (b_2 - E_1 x_1) \\ \text{s.a. } & \pi A_2 \leq c_2 \end{aligned} \quad (8)$$

onde o vetor  $\pi$  representa as variáveis duais.

O conjunto de restrições  $\pi A_2 \leq c_2$  define uma região viável para o problema (8) que não depende da decisão de 1º estágio  $x_1$ . Da teoria de programação linear [7], sabe-se que esta região é um poliedro convexo, e pode ser caracterizada pelo conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$ . Como a solução ótima de um problema de programação linear sempre corresponde a um vértice da região viável, o problema (8) pode ser resolvido por enumeração:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \pi^i (b_2 - E_1 x_1) \\ & \pi^i \in \pi \end{aligned} \quad (9)$$

O problema (9) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \alpha \\
 & \text{s.a. } \alpha \geq \pi^1 (b_2 - E_1 x_1) \\
 & \quad \alpha \geq \pi^2 (b_2 - E_1 x_1) \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \alpha \geq \pi^p (b_2 - E_1 x_1)
 \end{aligned} \tag{10}$$

sendo  $\alpha$  uma varável escalar.

Por ser  $\alpha$  maior ou igual a cada  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , será maior ou igual ao maior deles. Como a função objetivo do problema (10) é minimizar  $\alpha$ , pelo menos uma restrição estará ativa na solução ótima. Portanto, a solução deste problema é igual a solução ótima do problema (9), e conseqüentemente, igual a solução ótima do problema (8).

Em um problema de programação linear, o valor da função objetivo do problema primal e do problema dual coincidem na solução ótima. Como o problema (10) é equivalente ao problema (8), pode-se concluir que as restrições  $\alpha \geq \pi^i (b_2 - E_1 x_1)$  do problema (10) definem a função  $\alpha_1(x_1)$  do problema original (7). Este problema pode então ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } c_1 x_1 + \alpha \\
 & \text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1 \\
 & \quad \pi^1 (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0 \\
 & \quad \pi^2 (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0 \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \pi^p (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

onde  $\alpha$  corresponde ao valor de uma função convexa definida por restrições lineares do tipo  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1)$ , e os  $\{\pi^i\}$  são os coeficientes dos hiperplanos suporte:

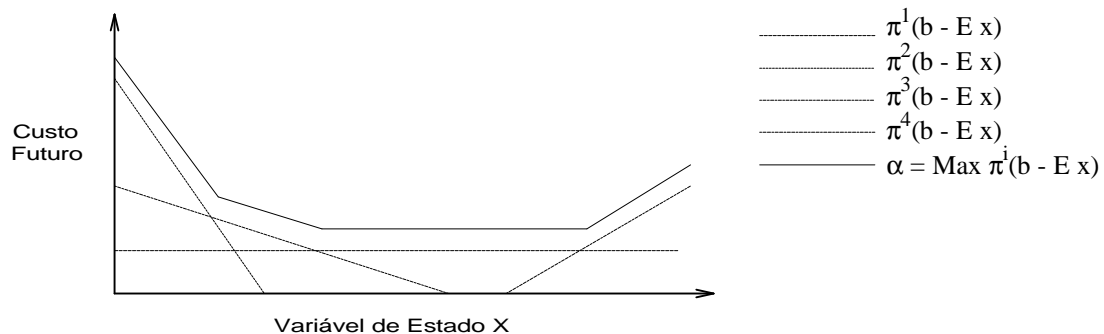


Figura 2 - Interpretação Geométrica da Função Custo Futuro

Logo, o problema original (4) pode ser escrito somente em função das variáveis do problema de 1° estágio mais a variável escalar  $\alpha$ .

O conjunto de restrições  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0, i = 1, \dots, p$ , pode ter grandes dimensões, porém somente algumas delas estarão ativas na solução ótima. Isto sugere o uso de técnicas de relaxação, base do algoritmo de decomposição de Benders. A idéia é obter, iterativamente, um subconjunto desses vértices e construir, a cada iteração, uma aproximação mais precisa, para a função custo futuro.

O algoritmo *programação dinâmica dual (PDD)* em dois estágios é, então descrito pelos seguintes passos:

a Faça  $J = 0$ ; limite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; aproximação inicial da função custo futuro  $\hat{\alpha}_1(x_1) = 0, \forall x_1$  (isto significa que não está disponível nenhuma informação sobre o conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi$ )

b Resolva o problema relaxado

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + \hat{\alpha} \\ & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & \pi^j (b_2 - E_1 x_1) - \hat{\alpha} \leq 0 \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (12)$$

c Seja  $(x_1^*, \alpha^*)$  a solução ótima do problema (12). Definindo:

$$\underline{z} = c_1 x_1^* + \hat{\alpha}^* \quad (13)$$

Pode-se concluir que  $\underline{z}$  é um limite inferior para a solução do problema original (7), pois o problema (12) é uma versão relaxada do problema (11).

d De posse da decisão  $x_1^*$ , resolva o problema de 2° estágio

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1^*) = \text{Min } & c_2 x_2 \\ \text{s.a. } & A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^* \end{aligned} \quad (14)$$

e Seja  $x_2^*$  a solução ótima do problema (14). O par  $(x_1^*, x_2^*)$  é uma solução viável do problema (7), mas não necessariamente a solução ótima. Portanto,

$$\bar{z} = \text{Min } \{ \bar{z}, c_1 x_1^* + c_2 x_2^* \} \quad (15)$$

é um limite superior da solução ótima.

f Seja TOL uma tolerância pré-especificada. Verifique se  $(\bar{z} - \underline{z} \leq \text{TOL})$ . Em caso afirmativo, a solução ótima é o par  $(x_1^*, x_2^*)$  associado a  $\bar{z}$ . Caso contrário, vá para (g).

g Seja  $\pi^*$  o vetor de multiplicadores simplex associados às restrições do problema (14). Sabe-se da teoria de programação linear que este vetor é uma solução básica viável do problema dual (8), e portanto um vértice da região viável  $\pi A_2 \leq c_2$ . Este vértice pode ser usado para formar uma nova restrição do tipo  $\pi^* (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0$ , denominada *corte de Benders*, que será adicionada ao problema relaxado (12).

Seja  $w^*$  o valor da solução ótima do problema (14) e  $\pi^*$  o vetor de multiplicadores simplex associado. Da igualdade de soluções ótimas dos problemas primal e dual podemos escrever:

$$w^* = \pi^* (b_2 - E_1 x_1^*) \quad (16)$$

Colocando  $(\pi^* b_2)$  em evidência, obtem-se:

$$\pi^* b_2 = w^* + \pi^* E_1 x_1^*$$

Substituindo na expressão  $\pi^* (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0$ , obtem-se uma expressão alternativa para o corte de Benders:

$$w^* + \pi^* E_1 (x_1^* - x_1) - \alpha \leq 0 \quad (17)$$

h Faça  $J = J + 1$ ;  $\pi^J = \pi^*$ ; Vá para (b).

É importante observar que neste algoritmo não há necessidade da discretização do espaço de estados  $x$ . A cada iteração, uma nova aproximação da função custo futuro é gerada em torno do ponto obtido a partir da solução do problema de 1º estágio,  $x_1^*$ . Isto significa que, a cada iteração, uma nova restrição linear (com coeficiente dado por  $\pi^*$ ) é adicionada à aproximação  $\hat{\alpha}_1(x_1)$ .

No caso de problemas multi-estágios o algoritmo PDD pode ser estendido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_T x_T \\ \text{s.a. } & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & E_1 x_1 + A_2 x_2 \geq b_2 \\ & E_2 x_2 + A_3 x_3 \geq b_3 \\ & \vdots \\ & E_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T \geq b_T \end{aligned} \quad (18)$$

O problema anterior pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \\ \text{s.a. } & A_1 x_1 \geq b_1 \end{aligned} \quad (19)$$

onde  $\alpha_1(x_1)$  representa as consequências da decisão de 1º estágio,  $x_1$ , nas decisões dos demais estágios.

A função  $\alpha_1(x_1)$  é calculada através de:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) = \text{Min } & c_2 x_2 + \dots + c_T x_T \\ \text{s.a. } & \begin{aligned} A_2 x_2 & \geq b_2 - E_1 x_1 \\ E_2 x_2 + A_3 x_3 & \geq b_3 \\ & \vdots \\ E_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T & \geq b_T \end{aligned} \end{aligned} \quad (20)$$

Repetindo este procedimento (T-2) vezes obtém-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{T-2}(x_{T-2}) = \text{Min } & c_{T-1} x_{T-1} + \alpha_{T-1}(x_{T-1}) \\ \text{s.a. } & A_{T-1} x_{T-1} \geq b_{T-1} - E_{T-2} x_{T-2} \end{aligned} \quad (21)$$

onde  $\alpha_{T-1}(x_{T-1})$  é a função do T-ésimo estágio:

$$\begin{aligned} \alpha_{T-1}(x_{T-1}) = \text{Min } & c_T x_T \\ \text{s.a. } & A_T x_T \geq b_T - E_{T-1} x_{T-1} \end{aligned} \quad (22)$$

Dessa forma uma estratégia de solução do problema multi-estágios é:

- a Faça  $J = 0$ ; limite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; aproximação inicial da função custo futuro ( $\hat{\alpha}_t(x_t) = 0, t = 1, \dots, T$ ),  $\forall x_t$  (isto significa que não está disponível nenhuma informação sobre o conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi$  associados a cada estágio).
- b Resolva o problema aproximado de 1º estágio:



$$\text{Min } c_1 x_1 + \hat{\alpha}_1 \quad (23)$$

$$\text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1$$

$$\pi_2^j (b_2 - E_1 x_1) - \hat{\alpha}_1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

solução ótima:  $(x_1^*, \hat{\alpha}_1^*)$

c calcule  $\underline{z}$  pela expressão (13).

d Repita para  $t = 2, \dots, T$  (simulação "forward")

Dado  $x_{t-1}^*$ , resolva o problema aproximado do t-ésimo estágio:

$$\hat{\alpha}_{t-1}(x_{t-1}) = \text{Min } c_t x_t + \hat{\alpha}_t \quad (24)$$

$$\text{s.a. } A_t x_t \geq b_t - E_{t-1} x_{t-1}^* \quad (\text{representam restrições do estágio } t)$$

$$\pi_{t+1}^j (b_{t+1} - E_t x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

$$\text{ou } w_{t+1}^j + \pi_{t+1}^j E_t (x_t^* - x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

(representam a aproximação da função custo futuro  $\hat{\alpha}_t(x_t)$ )

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T$  é sempre igual a zero)

solução ótima:  $(x_t^*, \hat{\alpha}_t^*)$

e O vetor  $(x_1^*, \dots, x_T^*)$  é uma solução viável do problema (18), mas não necessariamente a solução ótima. Portanto,

$$\bar{z} = \text{Min } \left\{ \bar{z}, \sum_{t=1}^T c_t x_t^* \right\} \quad (25)$$

é um limite superior da solução ótima.

f Seja TOL uma tolerância pré-especificada. Verifique se  $(\bar{z} - \underline{z} \leq \text{TOL})$ . Em caso afirmativo, a solução ótima é o par  $(x_1^*, \dots, x_T^*)$  associado a  $\bar{z}$ . Caso contrário, vá para (g).

g Faça  $J = J + 1$ .

Repita para  $t = T, \dots, 2$  (recursão "backward")

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } c_t x_t + \hat{\alpha}_t \quad (26)$$

$$\text{s.a. } A_t x_t \geq b_t - E_{t-1} x_{t-1}^*$$

$$\pi_{t+1}^j (b_{t+1} - E_t x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

ou  $w_{t+1}^j + \pi_{t+1}^j E_t (x_t^* - x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T = 0$ )

Seja  $\pi_t^J$  o vetor de multiplicadores simplex associado ao conjunto de restrições do problema (26) na solução ótima.  $\pi_t^J$  medem a variação do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento  $T$  devido a variações marginais nos níveis de armazenamento dos reservatórios no início do estágio  $t$  (ou final do estágio  $(t-1)$ ), representados por  $x_{t-1}^*$ . Estes multiplicadores são usados para formar uma nova restrição do tipo  $\pi_t^J (b_t - E_{t-1} x_{t-1}) - \hat{\alpha}_{t-1} \leq 0$  (*cut de Benders*) que será adicionada à função  $\hat{\alpha}_{t-1}(x_{t-1})$ , obtendo-se uma nova aproximação.

h Vá para (b).

Observa-se que o passo (d) do algoritmo PDD (simulação forward) tem dois objetivos:

1. cálculo de um limite superior  $\bar{z}$
2. seleção dos pontos  $(x_t^*, t = 1, \dots, T)$ , em torno dos quais são geradas novas aproximações para função custo futuro

### Programação Dinâmica Dual Estocástica

Uma característica importante do algoritmo de programação dinâmica é a capacidade de representar problemas de otimização estocástica. No problema de operação hidrotérmica significa que é possível representar a estocasticidade das afluições aos reservatórios.

É possível estender o algoritmo PDD para problemas de otimização estocástica, em que o problema de 2º estágio depende dos valores que uma ou mais variáveis aleatórias podem assumir. Por exemplo, supondo que o vetor  $b$  no problema (4) possa assumir  $m$  valores,  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$  respectivamente ( $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ ), o problema consiste em determinar a estratégia que minimiza o valor esperado do custo de operação:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + p_1 c_2 x_{21} + p_2 c_2 x_{22} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (27)$$

s.a.

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq b_1 \\ E_1 x_1 + A_2 x_{21} &\geq b_{21} \\ E_1 x_1 + A_2 x_{22} &\geq b_{22} \\ &\vdots \\ E_1 x_1 + A_2 x_{2m} &\geq b_{2m} \end{aligned}$$

O problema acima corresponde ao seguinte processo de decisão:

1º estágio: determine uma solução viável  $x^*$  tal que  $A x_1^* \geq b_1$ ;

2º estágio: encontre o vetor  $(x_{21}^*, x_{22}^*, \dots, x_{2m}^*)$ , solução do problema abaixo:

$$z = \text{Min } p_1 c_2 x_{21} + p_2 c_2 x_{22} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (28)$$

s.a.

$$\begin{aligned} A_2 x_{21} &\geq b_{21} - E_1 x_1^* \\ A_2 x_{22} &\geq b_{22} - E_1 x_1^* \\ &\vdots \\ A_2 x_{2m} &\geq b_{2m} - E_1 x_1^* \end{aligned}$$

O problema (28) pode também ser decomposto em  $m$  subproblemas de otimização independentes:

$$\text{Min } c_2 x_{21} \quad (29)$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{21} \geq b_{21} - E_1 x_1^*$$

$$\text{Min } c_2 x_{22} \quad (30)$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{22} \geq b_{22} - E_1 x_1^*$$

⋮

$$\text{Min } c_2 x_{2m} \quad (31)$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{2m} \geq b_{2m} - E_1 x_1^*$$

onde as soluções de (29), (30), ..., (31) são ponderadas pelas probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , respectivamente.

Assim como no caso determinístico, a solução de cada subproblema de 2º estágio é uma função da decisão  $x_1$  do problema de 1º estágio. Portanto, o problema (27) pode ser reescrito como:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + \bar{\alpha}(x_1) \quad (32)$$

$$\text{s.a. } A x_1 \geq b_1$$

onde  $c_1 x_1$  representa o custo imediato e  $\bar{\alpha}(x_1)$  representa o valor esperado do custo futuro (valor esperado das consequências da decisão  $x_1$  no futuro).  $\bar{\alpha}(x_1)$  é também o valor esperado das soluções dos subproblemas (29) a (31). A função  $\bar{\alpha}(x_1)$  é um poliedro convexo que pode ser construído a partir do valor esperado dos multiplicadores simplex associados a cada subproblema.

Sejam  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  os multiplicadores simplex associados às restrições dos problemas (29) a (31), e  $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$  os valores das soluções ótimas correspondentes. O corte de Benders associado ao problema (32) é:

$$p_1 \pi_1 (b_{21} - E_1 x_1) + p_2 \pi_2 (b_{22} - E_1 x_1) + \dots + p_m \pi_m (b_{2m} - E_1 x_1) \leq \bar{\alpha} \quad (33)$$

Ou alternativamente pela equação (17):

$$p_1 (w_1^* + \pi_1 E_1 (x_1^* - x_1)) + p_2 (w_2^* + \pi_2 E_1 (x_1^* - x_1)) + \dots + p_m (w_m^* + \pi_m E_1 (x_1^* - x_1)) \leq \bar{\alpha} \tag{34}$$

Agrupando tem-se:

$$\bar{w}^* + \bar{\pi} E_1 (x_1^* - x_1) \leq \bar{\alpha} \tag{35}$$

onde

$$\bar{w}^* = p_1 w_1^* + p_2 w_2^* + \dots + p_m w_m^* \tag{36}$$

e

$$\bar{\pi} = p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \dots + p_m \pi_m \tag{37}$$

Se o problema além de estocástico é multi-estágios os resultados obtidos acima são válidos.

É fácil notar que para o caso em que a cada estágio (t) há m possíveis cenários de afluições, a evolução do sistema de reservatórios apresenta uma estrutura em *árvore*, como ilustrado na figura 3. Cada ramo da árvore indica um possível cenário de afluições.

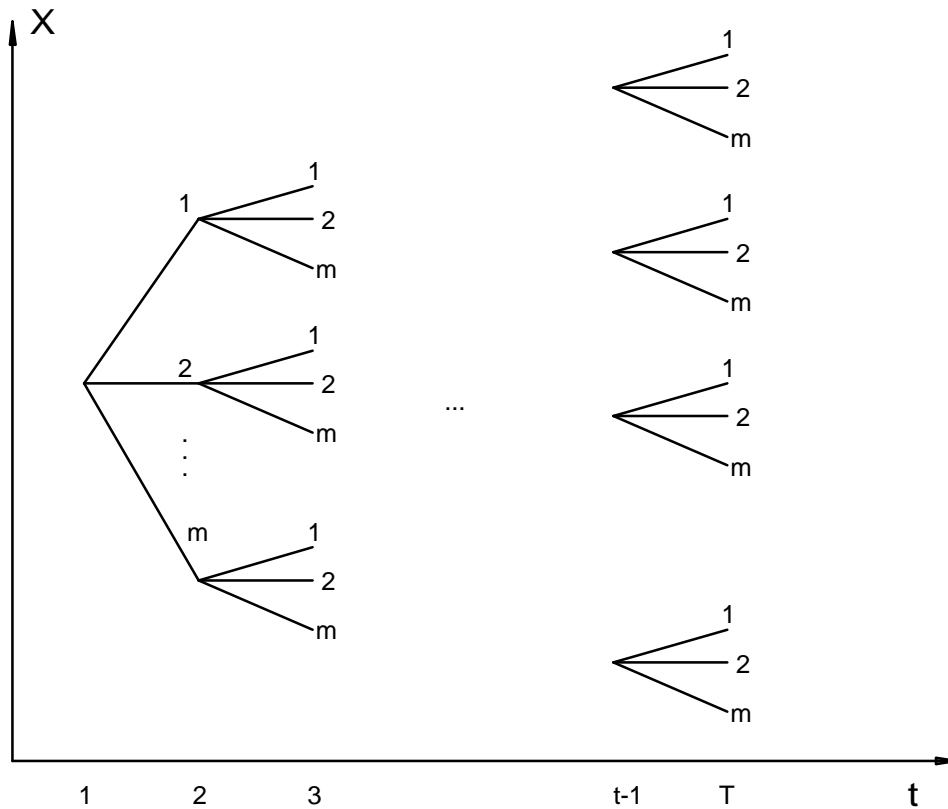


Figura 3 - Estrutura em "árvore" da Evolução do Sistema de Reservatórios ao Longo do Período de Planejamento

### Vetores Aleatórios Independentes

Assumindo, inicialmente, a hipótese de que as afluições em um estágio qualquer não dependem das afluições anteriores, isto é, os vetores  $b_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , são variáveis aleatórias independentes, o espaço de estados do sistema,  $X_t$ , é composto somente dos níveis de armazenamento dos reservatórios.

De posse de um conjunto de valores  $(x_{t,i}^*, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T)$ , o algoritmo *PDDE* é definido nos seguintes passos:

a) Faça  $J_t = 0$  ( $t = 1, \dots, T$ ); limite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; aproximação inicial da função custo futuro  $(\hat{\alpha}_t(x_t) = 0, t = 1, \dots, T), \forall x_t$  (isto significa que não está disponível nenhuma informação sobre o conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi$  associados a cada estágio).

b) Defina um conjunto de decisões  $x_{t,i}^*, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T$

c) Repita para  $t = T, \dots, 2$  (recursão "backward")

Faça  $J_t = J_{t+1} + n^\circ$  de estados escolhidos no estágio.

Repita para cada sequência  $(x_{t-1,i}^*, i = 1, \dots, n)$

Repita para cada cenário  $b_{t,k}, k = 1, \dots, m$

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } c_t x_{t,i} + \hat{\alpha}_t$$

(38)

$$\text{s.a. } A_t x_{t,i} \geq b_{t,k} - E_{t-1} x_{t-1,i}^*$$

$$\frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \pi_{t+1,l}^j (b_{t+1,l} - E_t x_{t,i}) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

$$\text{ou } \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m w_{t+1,l}^j + \pi_{t+1,l}^j E_t (x_{t,j}^* - x_{t,i}) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J_t$$

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T$  é sempre zero)

Seja  $\pi_{t,k}^i$  o vetor de multiplicadores simplex associado ao conjunto de restrições de cada um dos  $m$  problemas (38) na solução ótima.  $\pi_{t,k}^i$  medem a variação do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento  $T$  devido a variações marginais nos níveis de armazenamento dos reservatórios no início do estágio  $t$  (ou final do estágio  $(t-1)$ ),

representados por  $x_{t-1,i}^*$ . Estes multiplicadores são usados para formar uma nova restrição do tipo  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \pi_{t,k}^i (b_{t,k} - E_{t-1} x_{t-1,i}) - \bar{\alpha}_{t-1,i} \leq 0$  ou  $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m w_{t,k}^i + \pi_{t,k}^i E_{t-1} (x_{t-1,i}^* - x_{t-1,i}) - \bar{\alpha}_{t-1,i} \leq 0$  (*corte de Benders*) que será adicionada à função  $\hat{\alpha}_{t-1}(x_{t-1})$ , obtendo-se uma nova aproximação.

d) Vá para (b).

Na programação dinâmica dual o espaço de estados  $X_t$  não é discretizado, mas é necessário definir o conjunto  $\{x_{t,i}^*, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T\}$  em cada iteração do algoritmo. Como no caso determinístico, esse conjunto é definido através de uma simulação "forward" para cada sequência ou combinação de cenários  $\{b_{t,j}, j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T\}$ . Observa-se, porém que o número de sequências cresce exponencialmente com o número de estágios (figura 3). Uma solução para reduzir este crescimento exponencial do número de sequências é realizar uma simulação Monte Carlo "forward" para uma amostra do conjunto de sequências possíveis.

Na etapa de simulação "forward" são também definidos um limite inferior,  $\underline{z}$ , e um limite superior,  $\bar{z}$  da solução ótima.  $\underline{z}$  é obtido da solução do problema de 1º estágio, como no caso determinístico (expressão 13). Já  $\bar{z}$  é estimado a partir dos resultados de todas as sequências e estágios da simulação Monte Carlo:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (39)$$

onde  $z_i$  é o custo total de cada sequência Monte Carlo:

$$z_i = \sum_{t=1}^T c_t x_{t,i}^* \quad (40)$$

A incerteza associada a estimativa  $\bar{z}$  na expressão (39) pode ser medida pelo desvio-padrão do estimador:

$$\sigma_{\bar{z}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (41)$$

Por exemplo, um intervalo de confiança de 95% para o valor de população de  $\bar{z}$  é definido por:

$$[\bar{z} - 1.96\sigma_{\bar{z}}, \bar{z} + 1.96\sigma_{\bar{z}}] \quad (42)$$

É interessante notar a incerteza em torno da estimativa  $\bar{z}$  pode ser usada como critério de convergência: se o limite inferior  $\underline{z}$  estiver no intervalo acima o algoritmo pára. Este critério

introduz uma relação entre a precisão da simulação (dada pelo número de combinações ou seqüências que serão percorridas,  $n$ ) e a precisão do cálculo da política ótima de operação calculada pelo algoritmo de *PDDE*.

Dessa forma o passo (b) do algoritmo *PDDE* é descrito por:

b1 Resolva o problema aproximado de 1º estágio:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \hat{\alpha}_1 \quad (43)$$

$$\text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1$$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \pi_{2,k}^j (b_{2,k} - E_1 x_1) - \hat{\alpha}_1 \leq 0$$

$$\text{ou } \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m w_{2,k}^j + \pi_{2,k}^j E_1 (x_{1,j}^* - x_1) - \hat{\alpha}_1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, J_1$$

solução ótima:  $(x_1^*, \hat{\alpha}_1^*)$

inicialize  $x_{1,i}^* = x_1^*$ ,  $i = 1, \dots, n$

b2 calcule  $\underline{z}$  pela expressão (13).

b3 Repita para  $t = 2, \dots, T$  (simulação "forward")

Repita para  $i = 1, \dots, n$

Amostre um vetor  $b_{t,i}$  do conjunto  $\{b_{t,j}, j = 1, \dots, m\}$

Dado  $x_{t-1,i}^*$ , resolva o problema aproximado do  $t$ -ésimo estágio:

$$\hat{\alpha}_{t-1} = \text{Min } c_t x_{t,i} + \hat{\alpha}_t \quad (44)$$

s.a.  $A_t x_{t,i} \geq b_{t,i} - E_{t-1} x_{t-1,i}^*$  (representam restrições do estágio  $t$ )

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \pi_{t+1,k}^j (b_{t+1,k} - E_t x_{t,i}) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

$$\text{ou } \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m w_{t+1,k}^j + \pi_{t+1,k}^j E_t (x_{t,j}^* - x_{t,i}) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J_t$$

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T$  é sempre zero)

(representam a aproximação da função custo futuro  $\hat{\alpha}_t(x_t)$ )

solução ótima:  $(x_{t,i}^*, \hat{\alpha}_t^*)$

b4 Cálculo do limite superior da solução ótima:

$$\bar{z} = \text{Min } \{\bar{z}, \langle \text{equação (39)} \rangle\} \quad (45)$$



b5 Verifique, por exemplo, se  $\underline{z}$  está dentro do intervalo dado pela expressão (42). Em caso afirmativo, pare. Caso contrário, vá para (b6).

b6  $J_1 = J_1 + 1$

### Vetores Aleatórios Linearmente Dependentes

Uma crítica ao modelo da seção anterior é a representação do processo estocástico de afluições por um processo independente. Esta hipótese acarreta em estratégias de operação bastante otimistas, pois despreza a correlação entre as afluições de estágios distintos, responsável pela ocorrência de períodos secos

Séries hidrológicas de intervalo menor que o ano, tais como séries mensais, têm como característica o comportamento periódico das suas propriedades probabilísticas, como por exemplo a média, a variância e a estrutura de auto-correlação. A modelagem deste tipo de processo estocástico pode ser feita por formulações auto-regressivas cujos parâmetros apresentam um comportamento periódico. A esta classe de modelos denomina-se *modelos auto-regressivos periódicos* [8], PAR(p), onde p é um vetor,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ , que indica a ordem ou número de termos auto-regressivos do modelo de cada período. Neste modelo, a representação do processo estocástico de afluições no estágio t, representada por  $b_t$  no problema geral, é dada por:

$$b_t = \varphi_1 b_{t-1} + \varphi_2 b_{t-2} + \dots + \varphi_{p_t} b_{t-p_t} + \xi_t \quad (46)$$

onde  $\varphi_i$  é o i-ésimo coeficiente auto-regressivo e  $\xi_t$  é uma série de ruídos aleatórios independentes. Encontra-se em apêndice uma descrição detalhada desta modelagem.

O novo algoritmo *PDDE* tomará partido do fato das variáveis aleatórias  $\{\xi_t, t = 1, \dots, T\}$  terem o mesmo comportamento estatístico que as variáveis aleatórias  $\{b_t, t = 1, \dots, T\}$  da seção anterior: são independentes.

Quando, no problema (1), a tendência hidrológica é representada no espaço de estados  $X_t$  pela afluição no estágio anterior,  $A_{t-1}$ , equivale a dizer que as afluições ao sistema seguem um processo auto-regressivo periódico de ordem 1 (caso particular do modelo PAR(p) onde o vetor p é unitário). Em alguns locais de aproveitamentos hidroelétricos, este modelo, em escala mensal, falha em representar as propriedades do processo em escala anual [9]. Como consequência, o modelo tende a atribuir probabilidades excessivamente baixas a secas de longa duração que efetivamente ocorreram no passado, como a de 1952-1956 na Região Sudeste. No entanto, é fácil concluir que elementos do vetor p maiores que um implicam em aumento do número de variáveis de estado e portanto inviabilidade computacional do algoritmo *PDE*.

Como já foi visto, o algoritmo *PDD* (determinístico ou estocástico) não requer a discretização do espaço de estados  $X_t$ . O conjunto  $\{x_{t,i}, t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, n\}$ , para os quais serão

calculadas aproximações da função custo futuro, é obtido a partir de simulações "forward". Portanto, a inclusão em  $X_t$ , das variáveis  $A_{t-i}$ ,  $i = 1, \dots, p_t$ , não implica em "explosão" do espaço de estados.

O algoritmo *PDDE*, para o caso de vetores  $\{b_t, t = 1, \dots, T\}$  linearmente dependentes, apresenta as seguintes modificações:

simulação "forward"

amostra diretamente os vetores  $\{\xi_t, t = 1, \dots, T\}$ . Os vetores  $\{b_t, t = 1, \dots, T\}$  são então obtidos a partir da expressão (46).

substitui  $b_{t+1}$  por  $(\varphi_1 b_t + \varphi_2 b_{t-1} + \dots + \varphi_{p_t} b_{t-p_t+1} + \xi_{t+1})$  na expressão (44).

recursão "backward"

modificações análogas às anteriores.

Apesar de pequenas modificações, elas incorrem em particularidades interessantes, que serão analisadas diretamente no problema de operação hidrotérmica (1). Neste caso, o espaço de estados do sistema em um estágio (t) qualquer é composto dos níveis de armazenamento dos reservatórios e  $p_t$  aflúncias de estágios anteriores (característica de cada usina hidroelétrica).

O algoritmo *PDDE* decompõe o problema multi-estágios estocástico em uma sequência de problemas de um-estágio. Neste problema estão representadas as restrições operativas no estágio mais uma aproximação linear por partes do valor esperado da função custo futuro. O problema de um-estágio que descreve o problema de operação hidrotérmica é dado por:

$$\text{Min} \sum_{k \in \text{NS}} \sum_{j \in \text{NUT}_k} C_j (GT_{t,j}) + \alpha \quad (\text{a})$$

s.a.

$$\sum_{i \in \text{NUH}_k} \rho_i Q_{t,i} + \sum_{j \in \text{NUT}_k} GT_{t,j} + \sum_{i \in \Omega_k} (F_{t,i,k} - F_{t,k,i}) = D_{t,k} \quad k = 1, \dots, \text{NS} \quad (\text{b})$$

$$GT_{t,j} \leq \overline{GT}_j \quad \forall j \in \text{NUT}_k, \quad k = 1, \dots, \text{NS} \quad (\text{c})$$

$$|F_{t,i,k}| \leq \overline{F}_{t,i,k} \quad i = 1, \dots, \text{NS}, \quad k = 1, \dots, \text{NS} \quad (\text{d})$$

$$V_{t+1}(i) = \overline{V}_t(i) + A_t(i) - (Q_t(i) + S_t(i)) + \sum_{j \in M_i} (Q_t(j) + S_t(j)) \quad (\text{e})$$

$$\underline{V}_{t+1}(i) \leq V_{t+1}(i) \leq \overline{V}_{t+1}(i) \quad (\text{f})$$

$$Q_t(i) \leq \overline{Q}_t(i) \quad (\text{g})$$

$$Q_t(i) + S_t(i) \geq L_t(i) \quad (\text{h})$$

$$i = 1, \dots, \text{NUH}$$

$$\langle \text{aproximação linear por partes do valor esperado da função custo futuro} \rangle \quad (\text{i})$$

A forma da equação linear por partes que representa a aproximação do valor esperado da função custo futuro no problema (47) depende da hipótese assumida sobre a estocasticidade das afluições ao sistema de reservatórios.

Quando o processo de afluições segue, por exemplo, um processo auto-regressivo periódico de ordem três, o sistema hidrotérmico, em um estágio qualquer ( $t$ ), é representado pelas variáveis de estado  $V_t$ ,  $A_{t-1}$ ,  $A_{t-2}$  e  $A_{t-3}$  em cada um dos reservatórios. Assumindo, sem perda de generalidade, que o sistema é composto por apenas uma usina hidroelétrica e uma usina térmica, o algoritmo de *PDDE* no estágio ( $T$ ) (1<sup>o</sup> iteração) é formulado da seguinte forma:

Repita para cada estado  $[(V_T, A_{T-1}, A_{T-2}, A_{T-3}), i = 1, \dots, n]$

Repita para cada cenário  $\xi_{T,k}$ ,  $k = 1, \dots, m$

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } C(GT_T) \quad (a)$$

s.a. (48)

$$\rho Q_{T,i} + GT_{T,i} = D_T \quad (b)$$

$$GT_{T,i} \leq \bar{GT}_T \quad (c)$$

$$\begin{aligned} V_{T+1,i} &= V_{T,i} + A_{T,i} - (Q_{T,i} + S_{T,i}) \quad \text{ou} \\ V_{T+1,i} &= V_{T,i} + (\phi_{1,T} A_{T-1,i} + \phi_{2,T} A_{T-2,i} + \phi_{3,T} A_{T-3,i} + \xi_{T,k}) - \\ &(Q_{T,i} + S_{T,i}) \quad (e) \end{aligned}$$

$$\underline{V}_{T+1} \leq V_{T+1,i} \leq \bar{V}_{T+1} \quad (f)$$

$$Q_{T,i} \leq \bar{Q}_T \quad (g)$$

$$Q_{T,i} + S_{T,i} \geq L_T \quad (h)$$

O corte de Benders médio associado ao estado  $(V_T, A_{T-1}, A_{T-2}, A_{T-3})(i)$  é:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{T,i} + (\bar{\pi}_V)_{T,i} (V_{T,i}^* - V_{T,i}) + (\bar{\pi}_{A_{T-1}})_{T,i} (A_{T-1,i}^* - A_{T-1,i}) + \\ (\bar{\pi}_{A_{T-2}})_{T,i} (A_{T-2,i}^* - A_{T-2,i}) + (\bar{\pi}_{A_{T-3}})_{T,i} (A_{T-3,i}^* - A_{T-3,i}) - \hat{\alpha}(V_T, A_{T-1}, A_{T-2}, A_{T-3}) \leq 0 \end{aligned} \quad (49)$$

onde

$(\bar{\pi}_V)_T$  representa o multiplicador de Lagrange médio do estágio  $T$ , associado ao nível de armazenamento do reservatório no início do estágio  $T$

$(\bar{\pi}_{A_{T-1}})_{T,i} = \varphi_{1,T} (\bar{\pi}_V)_{T,i}$ ; representa o multiplicador de Lagrange médio do estágio T, associado a afluência incremental durante o estágio (T-1)

$(\bar{\pi}_{A_{T-2}})_{T,i} = \varphi_{2,T} (\bar{\pi}_V)_{T,i}$ ; representa o multiplicador de Lagrange médio do estágio T, associado a afluência incremental durante o estágio (T-2)

$(\bar{\pi}_{A_{T-3}})_{T,i} = \varphi_{3,T} (\bar{\pi}_V)_{T,i}$ ; representa o multiplicador de Lagrange médio do estágio T, associado a afluência incremental durante o estágio (T-3)

Este estágio contribuirá com n novos cortes para a função  $\hat{\alpha}(V_T, A_{T-1}, A_{T-2}, A_{T-3})$ .

Da mesma forma o algoritmo PDDE no estágio  $t = (T-1)$  apresenta a seguinte forma:

Repita para cada estado  $[(V_t, A_{t-1}, A_{t-2}, A_{t-3}), i = 1, \dots, n]$

Repita para cada cenário  $\xi_{t,k}, k = 1, \dots, m$

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } C(GT_t) + \hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, A_{t-1}, A_{t-2}) \quad (a)$$

s.a. (50)

$$\rho Q_{t,i} + GT_{t,i} = D_t \quad (b)$$

$$GT_{t,i} \leq \bar{GT}_t \quad (c)$$

$$V_{t+1,i} = V_{t,i} + A_{t,i} - (Q_{t,i} + S_{t,i}) \quad \text{ou}$$

$$V_{t+1,i} = V_{t,i} + (\varphi_{1,t} A_{t-1,i} + \varphi_{2,t} A_{t-2,i} + \varphi_{3,t} A_{t-3,i} + \xi_{t,k}) - (Q_{t,i} + S_{t,i}) \quad (e)$$

$$\underline{V}_{t+1} \leq V_{t+1,i} \leq \bar{V}_{t+1} \quad (f)$$

$$Q_{t,i} \leq \bar{Q}_t \quad (g)$$

$$Q_{t,i} + S_{t,i} \geq L_t \quad (h)$$

$$\bar{w}_{t+1,j} + (\bar{\pi}_V)_{t+1,j} (V_{t+1,j}^* - V_{t+1,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} (A_{t,j}^* - A_{t,i}) +$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t+1,j} (A_{t-1,j}^* - A_{t-1,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t+1,j} (A_{t-2,j}^* - A_{t-2,i}) -$$

$$\hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, A_{t-1}, A_{t-2}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (i)$$

Observando-se que  $A_{t,i}$  na equação (50.i) pode ser substituída por  $(\varphi_{1,t} A_{t-1,i} + \varphi_{2,t} A_{t-2,i} + \varphi_{3,t} A_{t-3,i} + \xi_{t,k})$ , o corte de Benders médio deste estágio, associado ao estado

$(V_t, A_{t-1}, A_{t-2}, A_{t-3})(i)$  é dado por:

$$\bar{w}_{t,i} + (\bar{\pi}_V)_{t,i} (V_{t,i}^* - V_{t,i}) + \varphi_{1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} (A_{t-1,i}^* - A_{t-1,i}) + \varphi_{2,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} (A_{t-2,i}^* - A_{t-2,i}) +$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{3,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} (A_{t-3,i}^* - A_{t-3,i}) + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} [(\varphi_{1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t+1,j}) (A_{t-1,i}^* - A_{t-1,i}) + \\ & (\varphi_{2,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t+1,j}) (A_{t-2,i}^* - A_{t-2,i}) + \varphi_{3,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} (A_{t-3,i}^* - A_{t-3,i})] - \\ & \hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, A_{t-2}, A_{t-3}) \leq 0 \end{aligned} \quad (51)$$

Agrupando os termos:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{t,i} + (\bar{\pi}_V)_{t,i} (V_{t,i}^* - V_{t,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} (A_{t-1,i}^* - A_{t-1,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t,i} (A_{t-2,i}^* - A_{t-2,i}) + \\ & (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t,i} (A_{t-3,i}^* - A_{t-3,i}) - \hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, A_{t-2}, A_{t-3}) \leq 0 \end{aligned} \quad (52)$$

onde

$$(\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} = \varphi_{1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t+1,j}) \quad (53)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t,i} = \varphi_{2,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{2,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t+1,j}) \quad (54)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t,i} = \varphi_{3,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} \varphi_{3,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} \quad (55)$$

Logo, este estágio contribuirá com  $n$  novos cortes para a função  $\hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, A_{t-2}, A_{t-3})$

É fácil observar que o conjunto de equações (50) vale para qualquer estágio ( $t$ ) do horizonte de planejamento. Dessa forma, o problema de operação hidrotérmica em um-estágio no algoritmo *PDDE* no estágio ( $t$ ), supondo que as afluências seguem um processo auto-regressivo periódico de ordem  $p$ , constante para todos os estágios, é descrito por:

Repita para cada estado  $[(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p}), i = 1, \dots, n]$

Repita para cada cenário  $\xi_{t,k}, k = 1, \dots, m$

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } C(GT_t) + \hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p+1}) \quad (a)$$

s.a. (56)

$$\rho Q_{t,i} + GT_{t,i} = D_t \quad (b)$$

$$GT_{t,i} \leq \overline{GT}_t \quad (c)$$

$$V_{t+1,i} = V_{t,i} + A_{t,i} - (Q_{t,i} + S_{t,i}) \quad \text{ou}$$

$$V_{t+1,i} = V_{t,i} + (\varphi_{1,t} A_{t-1,i} + \dots + \varphi_{p,t} A_{t-p,i} + \xi_{t,k}) -$$

$$(Q_{t,i} + S_{t,i}) \quad (e)$$

$$\underline{V}_{t+1} \leq V_{t+1,i} \leq \bar{V}_{t+1} \quad (f)$$

$$Q_{t,i} \leq \bar{Q}_t \quad (g)$$

$$Q_{t,i} + S_{t,i} \geq L_t \quad (h)$$

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{t+1,j} + (\bar{\pi}_V)_{t+1,j} (V_{t+1,j}^* - V_{t+1,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} (A_{t,j}^* - A_{t,i}) + \\ & \dots + (\bar{\pi}_{A_{t-p}})_{t+1,j} (A_{t-p+1,j}^* - A_{t-p+1,i}) - \\ & \hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p+1}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (i) \\ & \text{(exceto para } t = T, \text{ onde } \hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p+1}) \text{ é sempre zero)} \end{aligned}$$

O corte de Benders médio do estágio (t), associado ao estado  $(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p})$ (i) é dado por:

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{t,i} + (\bar{\pi}_V)_{t,i} (V_{t,i}^* - V_{t,i}) + (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} (A_{t-1,i}^* - A_{t-1,i}) + \dots + (\bar{\pi}_{A_{t-p}})_{t,i} (A_{t-p,i}^* - A_{t-p,i}) \\ & - \hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p}) \leq 0 \end{aligned} \quad (57)$$

onde

caso  $(t = T)$ :

$$(\bar{\pi}_{A_{t-l}})_{t,i} = \varphi_{l,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} \quad l = 1, \dots, p \quad (58)$$

nos casos restantes:

$$(\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} = \varphi_{1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t+1,j}) \quad (59)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t,i} = \varphi_{2,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{2,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t+1,j}) \quad (60)$$

⋮

$$(\bar{\pi}_{A_{t-p+1}})_{t,i} = \varphi_{p-1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{p-1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-p}})_{t+1,j}) \quad (61)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-p}})_{t,i} = \varphi_{p,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} \varphi_{p,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} \quad (62)$$

Quando o processo estocástico de afluições segue um processo auto-regressivo periódico, onde a ordem do modelo em um estágio qualquer (t) é dada por  $p_t$  (característico de cada estágio), o sistema hidrotérmico, no estágio (t), é representado pelas variáveis de estado  $V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p_t}$  em cada um dos reservatórios. Neste caso geral, basta observar que a aproximação linear por partes da função custo futuro no estágio (t) é função dos multiplicadores simplex obtidos no estágio (t+1). Portanto, o número de parcelas é função da

ordem do modelo auto-regressivo correspondente ao estágio (t+1). Já o corte de Benders que será adicionado à função  $\hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p_t})$  é construído com os multiplicadores simplex obtidos no estágio (t).

O problema de operação hidrotérmica em um-estágio no algoritmo *PDDE* no estágio (t), para o caso geral é então descrito por:

Repita para cada estado  $[(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p_t}), i = 1, \dots, n]$

Repita para cada cenário  $\xi_{t,k}, k = 1, \dots, m$

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } C(GT_t) + \hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p_{t+1}}) \quad (a)$$

s.a. (63)

$$\rho Q_{t,i} + GT_{t,i} = D_t \quad (b)$$

$$GT_{t,i} \leq \overline{GT}_t \quad (c)$$

$$\begin{aligned} V_{t+1,i} &= V_{t,i} + A_{t,i} - (Q_{t,i} + S_{t,i}) \quad \text{ou} \\ V_{t+1,i} &= V_{t,i} + (\varphi_{1,t} A_{t-1,i} + \dots + \varphi_{p,t} A_{t-p_t,i} + \xi_{t,k}) - \\ &(Q_{t,i} + S_{t,i}) \end{aligned} \quad (e)$$

$$\underline{V}_{t+1} \leq V_{t+1,i} \leq \overline{V}_{t+1} \quad (f)$$

$$Q_{t,i} \leq \overline{Q}_t \quad (g)$$

$$Q_{t,i} + S_{t,i} \geq L_t \quad (h)$$

$$\overline{w}_{t+1,j} + (\overline{\pi}_V)_{t+1,j} (V_{t+1,j}^* - V_{t+1,i}) + (\overline{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} (A_{t,j}^* - A_{t,i}) +$$

$$\dots + (\overline{\pi}_{A_{t-p_{t+1}}})_{t+1,j} (A_{t-p_{t+1},j}^* - A_{t-p_{t+1},i}) -$$

$$\hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p_{t+1}}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (i)$$

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}(V_{t+1}, A_t, \dots, A_{t-p_{t+1}})$  é sempre zero)

O corte de Benders médio do estágio (t), associado ao estado  $(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p_t})(i)$  é dado por:

$$\begin{aligned} &\overline{w}_{t,i} + (\overline{\pi}_V)_{t,i} (V_{t,i}^* - V_{t,i}) + (\overline{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} (A_{t-1,i}^* - A_{t-1,i}) + \dots + (\overline{\pi}_{A_{t-p_t}})_{t,i} (A_{t-p_t,i}^* - A_{t-p_t,i}) \\ &- \hat{\alpha}(V_t, A_{t-1}, \dots, A_{t-p_t}) \leq 0 \end{aligned} \quad (64)$$

onde

seja  $q = \text{MAX} \{p_t, \forall t\}$

caso ( $t = T$ ):



$$(\bar{\pi}_{A_{t-l}})_{t,i} = \varphi_{l,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} \quad l = 1, \dots, p_t \quad (65)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-l}})_{t,i} = 0 \quad l = p_t + 1, \dots, q \quad (66)$$

nos casos restantes:

$$(\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t,i} = \varphi_{1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t+1,j}) \quad (67)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-2}})_{t,i} = \varphi_{2,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{2,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-3}})_{t+1,j}) \quad (68)$$

⋮

$$(\bar{\pi}_{A_{t-p_t+1}})_{t,i} = \varphi_{p_t-1,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} (\varphi_{p_t-1,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} + (\bar{\pi}_{A_{t-p_t}})_{t+1,j}) \quad (69)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-p_t}})_{t,i} = \varphi_{p_t,t} (\bar{\pi}_V)_{t,i} + \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{t,j} \varphi_{p_t,t} (\bar{\pi}_{A_{t-1}})_{t+1,j} \quad (70)$$

$$(\bar{\pi}_{A_{t-l}})_{t,i} = 0 \quad l = p_t + 1, \dots, q \quad (71)$$

#### 4 - CONCLUSÕES

Neste relatório foi descrito uma metodologia baseada na programação dinâmica estocástica, denominada programação dinâmica dual estocástica (*PDDE*). Mostrou-se que o custo de operação em um estágio ( $t$ ) qualquer até o final do horizonte de planejamento ( $T$ ) é uma função linear por partes e, então, neste algoritmo uma aproximação desta função é construída de forma recursiva, dispensando a discretização do espaços de estados. Em seguida, descreveu-se como representar, no algoritmo *PDDE*, o processo estocástico de afluências por modelos auto-regressivos periódicos.

**5 - REFERÊNCIAS**

- [1] Rosenthal,R.D., "The Status of Optimization Models for The Operation of Multireservoir Systems with Stochastic Inflows and Nonseparable Benefits", Rep. 75, *Tenn. Water Res. Cent.*, Knoxville, May/1985.
- [2] Pereira,M.V.F., "Optimal Scheduling of Hydrothermal Systems - An Overview", *IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems*, Rio de Janeiro, Brasil, 1985.
- [3] Pereira,M.V.F., Pinto,L.M.V.G., "Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach", *Water Resources Research*, Vol. 21, N° 6, pages 779-792, June/1985.
- [4] Pereira,M.V.F., "Optimal Stochastic Operations of Large Hydroelectric Systems", *Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 11, N° 3, pages 161-169, July/1989.
- [5] Gorestin,B., Campodonico,N.M., Costa,J.P., Pereira,M.V.F., "Stochastic Optimization of a Hydro-Thermal System Including Network Constraints", *IEEE Transactions on PS*, Vol. 7, N° 2, May/1992.
- [6] Benders,J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik*, Vol. 4, pages 238-252, 1962.
- [7] Lasdon,L.S., *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Company, Collier-MacMillan Limited, London, 1970.
- [8] Salas,J.D., Delleur,J.W., Yevjevich,V., Lane,W.L., *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*, Water Resources Publications, 1980.
- [9] Kelman,J., "Modelos Estocásticos no Gerenciamento de Recursos Hídricos", *Modelos para Gerenciamento de Recursos Hídricos - Coleção ABRH de Recursos Hídricos*, Vol. 1, Nobel/ABRH, 1977.
- [10] Maceira,M.E.P., *Operação Ótima de Reservatórios com Previsão de Afluências*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, março/1989.

- [11] Box,G.E.P., Jenkins,G.M., *Time Series Analysis - Forecasting and Control*, Holden-Day, 1970.
- [12] Harvey,A.C., *Time Series Models*, P. Allan, 1981.

## APÊNDICE - O MODELO AUTO-REGRESSIVO PERIÓDICO

Séries hidrológicas de intervalo de tempo menor que o ano, tais como séries mensais, têm como característica o comportamento periódico das suas propriedades probabilísticas, como por exemplo a média, a variância, a assimetria e a estrutura de autocorrelação. A análise deste tipo de séries pode ser feita pelo uso de formulações auto-regressivas cujos parâmetros apresentam um comportamento periódico. A esta classe de modelos costuma-se denominar modelos auto-regressivos periódicos [8]. Estes modelos são referenciados por modelos PAR(p), onde p é a ordem do modelo, ou seja, o número de termos auto-regressivos do modelo. Em geral, p é um vetor,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ , onde cada elemento fornece a ordem de cada período.

O modelo PAR( $p_1, p_2, \dots, p_s$ ) pode ser descrito matematicamente por:

$$\Phi^m(B) \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) = a_t \quad (1)$$

onde:

$Z_t$  é uma série sazonal de período s

s é o número de períodos (s = 12 para séries mensais)

N é o número de anos

t é o índice do tempo,  $t = 1, 2, \dots, sN$ , função do ano T (T = 1, 2, ..., N) e do período m (m = 1, 2, ..., s)

$\mu_m$  é a média sazonal de período s

$\sigma_m$  é desvio-padrão sazonal de período s

$\Phi^m(B)$  é o operador auto-regressivo de ordem  $p_m$

$$\Phi^m(B) = (1 - \phi_1^m B - \phi_2^m B^2 - \dots - \phi_{p_m}^m B^{p_m}),$$

$$B^i \text{ aplicado a } Z_t \text{ resulta em } Z_{t-i} \quad (B^i Z_t = Z_{t-i})$$

$p_m$  é a ordem do operador auto-regressivo do período m

$a_t$  série de ruídos independentes com distribuição normal, média zero e variância  $\sigma_a^{2(m)}$

Seja  $\rho^m(k)$  a correlação entre  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$ , de tal forma que t corresponda ao período m:

$$\rho^m(k) = E \left[ \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \quad (2)$$

O conjunto de funções de autocorrelação  $\rho^m(k)$  dos períodos  $m = 1, \dots, s$ , descrevem a estrutura de dependência temporal da série. Estas funções são obtidas por [10]:

$$\rho^m(k) = \phi_1^m \rho^{m-1}(k-1) + \dots + \phi_{k-1}^m \rho^{m-k+1}(1) + \phi_k^m + \phi_{k+1}^m \rho^{m-k}(1) + \dots + \phi_{p_m}^m \rho^{m-k}(p_m-k) \quad (3)$$

Conhecidos os parâmetros de um modelo PAR(p) as funções  $\rho^m(k)$  são dadas pela solução de (3), e podem ser expressas por uma combinação de decaimentos exponenciais e/ou ondas senoidais, o que faz com que cada  $\rho^m(k)$  tenda a zero a medida que  $k$  cresce.

Fixando-se  $m$  e variando  $k$  de 1 a  $p_m$  em (3) obtemos para cada período um conjunto de equações comumente denominado de equações de Yule-Walker. Para um período  $m$  qualquer:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho^{m-1}(1) & \rho^{m-1}(2) & \dots & \rho^{m-1}(p_m-1) \\ \rho^{m-1}(1) & 1 & \rho^{m-2}(1) & \dots & \rho^{m-2}(p_m-2) \\ \rho^{m-1}(2) & \rho^{m-2}(1) & 1 & \dots & \rho^{m-3}(p_m-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{m-1}(p_m-1) & \rho^{m-2}(p_m-2) & \rho^{m-3}(p_m-3) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \\ \phi_3^m \\ \dots \\ \phi_{p_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^m(1) \\ \rho^m(2) \\ \rho^m(3) \\ \dots \\ \rho^m(p_m) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Chamando  $\phi_{kj}$  o  $j$ -ésimo parâmetro auto-regressivo de um processo de ordem  $k$ ,  $\phi_{kk}$  é o último parâmetro deste processo.  $\phi_{kk}^m$ , definida em função do índice  $k$  é chamada de função autocorrelação parcial do período  $m$ . O conjunto de informações  $\phi_{kk}^m$ ,  $m = 1, 2, \dots, s$ , é uma outra forma de representar a estrutura de dependência do processo estocástico ao longo do tempo. Em um processo auto-regressivo de ordem  $p_m$ , a função de autocorrelação parcial  $\phi_{kk}^m$  será diferente de zero para  $k$  igual a  $p_m$  e zero para  $k$  maior que  $p_m$ .

A variância do processo estocástico de ruídos aleatórios, para um período qualquer  $m$ , é dada por:

$$\sigma_a^{2(m)} = 1 - \phi_1^m \rho^m(1) - \phi_2^m \rho^m(2) - \dots - \phi_{p_m}^m \rho^m(p_m) \quad (5)$$

Na metodologia para ajuste de modelos estocásticos da família ARIMA a séries temporais, proposta por Box & Jenkins [11], a estratégia de seleção do modelo é dividida em três etapas. A primeira etapa, denominada de *identificação do modelo*, consiste em escolher, tentativamente, a ordem do modelo baseando-se em estimativas das funções  $\rho^m(k)$  e  $\phi_{kk}^m$  obtidas a partir da série amostral ou histórica. Na modelagem auto-regressiva periódica consiste em escolher o vetor  $p$ .

A segunda etapa refere-se à *estimação do modelo*, ou seja, estimação dos parâmetros,  $((\phi_k^m, k = 1, \dots, p_m), m = 1, \dots, s)$ . Para modelos auto-regressivos os estimadores de momento são em geral bastantes eficientes [12]. Os parâmetros  $(\phi_k^m, k = 1, \dots, p_m), m = 1, \dots, s)$  são estimados substituindo-se na expressão (4)  $\rho^{m-i}(k-j), j = 0, \dots, (p_{m-i} - i), i = 0, \dots, p_m - 1$ , por suas estimativas, dadas por:

$$\hat{\rho}^{m(j)} = \frac{\left( N^{-1} \sum_{i=1}^N (Z_{(i-1)s+m} - \hat{\mu}_m) (Z_{(i-1)s+m-j} - \hat{\mu}_{m-j}) \right)}{(\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-j})} \quad (6)$$

onde:

$$\hat{\mu}_m = N^{-1} \sum_{i=1}^N Z_{(i-1)s+m} \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_m = N^{-1} \sum_{i=1}^N (Z_{(i-1)s+m} - \hat{\mu}_m)^2 \quad m = 1, 2, \dots, s \quad (8)$$

A terceira etapa diz respeito à *verificação do modelo*, isto é, verificar através de testes estatísticos se as hipóteses assumidas durante as etapas anteriores são atendidas. Maiores detalhes são encontrados em [10], [11].



# RELATÓRIO

Nº Técnico 237/93

Revisão \_\_\_\_\_

## CLIENTE:

ELETOBRAS - Centrais Elétricas Brasileiras S/A  
 Av. Marechal Floriano, 19/20º andar  
 20.000 - Rio de Janeiro - RJ  
 At.: Engº Luiz Alberto Machado Fortunato

## REFERÊNCIA:

## PROJETO:

DPP/PON-2000/1088

## TÍTULO:

Programação Dinâmica Dual Estocástica Aplicada ao Planejamento da Operação Energética de Sistemas Hidrotérmicos com Representação do Processo Estocástico de Afluências por Modelos Auto-regressivos Periódicos.

## RESUMO:

Este relatório descreve como incorporar a representação do modelo estocástico de afluências por modelos auto-regressivos periódicos no algoritmo de programação dinâmica dual estocástica.

Responsável pelo Relatório

Nome: Joari Paulo da Costa

Telefone: (021) 598-2450

Fax: (021) 260-1340

## COORDENAÇÃO

Coordenador

Nome: Sergio Henrique F. Cunha

## APROVAÇÃO:

Nome: Marcio Szechtman

## AUTORES:

Maria Elvira Piñeiro Maceira

## CLASSIFICAÇÃO:

## PALAVRAS-CHAVE:

programação dinâmica dual, modelo estocástico, modelos auto-regressivos.

Para informações adicionais entre em contato com o responsável técnico, usando os números de telefone ou fax indicados a seguir do respectivo nome.

O presente relatório consta de 35 folhas e anexos

CEPEL - CENTRO DE PESQUISAS DE ENERGIA ELÉTRICA  
 ESCRITÓRIO CENTRAL:  
 AV. UM S/N - ILHA DO FUNDÃO - CIDADE UNIVERSITÁRIA

CGC: 42 268 886/0001-60; INSCRIÇÃO ESTADUAL: 819.103 - 40

LABORATÓRIO GEORGE ZABLUDOWSKI:  
 AV. OLINDA S/N - ADRIANÓPOLIS  
 24620-121 - NOVA GUATUBERGA - RJ